ŘEŠENÍ

Cvičení 1. Označme náhodnou veličinu $X =$ doba tikání.

(a) Zkoumáme parametr $\theta = \mathbb{E}X$, tj. střední dobu tikání. Tuto hodnotu odhadneme výběrovým průměrem, tj. provedeme n nezávislých pozorování $X_1, ..., X_n$ a spočítáme

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(b) $\mathbb{E}\bar{X}_n = \mathbb{E}X = \theta$, $\mathrm{var}\bar{X}_n = \frac{\mathrm{var}X}{n}$.

(c)Předpokládáme, že náhodná veličina X nabývá hodnot na nějakém intervalu $[a, b]$, kde hodnoty a a b jsou neznáme. K jejich odhadu na základě pozorování $X_1, ..., X_n$ použijeme tyto odhady

$$\hat{a}_n := \min_{i=1,...,n} X_i, \qquad \hat{b}_n := \max_{i=1,...,n} X_i.$$

Rozdělení těchto odhadů je dáno distribučními funkcemi $F_{\hat{a}_n}$ a $F_{\hat{b}_n}$, kde

$$F_{\hat{a}_n}(x) = \mathbb{P}(\hat{a}_n \leq x) = \mathbb{P}(\min_{i=1,...,n} X_i \leq x) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n}[X_i \leq x]) = ... = 1 - (1 - F(x))^n,$$

$$F_{\hat{b}_n}(x) = \mathbb{P}(\hat{b}_n \leq x) = \mathbb{P}(\max_{i=1,...,n} X_i \leq x) = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n}[X_i \leq x]) = ... = (F(x))^n.$$

Při výpočtu jsme využili nezávislost a stejné rozdělení náhodných veličin $X_1, ..., X_n$ a doplňkové pravděpodobnosti k sjednocení a průnikům. Hustoty spočítáme derivováním

$$f_{\hat{a}_n}(x) = F'_{\hat{a}_n}(x) = nf(x)(1 - F(x))^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$f_{\hat{b}_n}(x) = F'_{\hat{b}_n}(x) = nf(x)(F(x))^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(d) Dosadíme výše hustotu a distribuční funkci rovnoměrného rozdělení na $[a, b]$, tj.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Dostaneme

$$f_{\hat{a}_n}(x) = \begin{cases} \frac{n}{b-a}(1 - \frac{x-a}{b-a})^{n-1} & \text{pro } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

$$F_{\hat{a}_n}(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ 1 - (1 - \frac{x-a}{b-a})^n & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Střední hodnota odhadu $\hat{a}_n$ je tedy

$$\mathbb{E}\hat{a}_n = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\hat{a}_n}(x)\mathrm{d}x = ... = a + \frac{b-a}{n+1}.$$

Podobně bychom dostali $\mathbb{E}\hat{b}_n = b - \frac{b-a}{n+1}$

Pro $n \to \infty$ se distribuční funkce $\hat{a}_n$ chová jako

$$F_{\hat{a}_\infty}(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

Tato distribuční funkce odpovídá degenerovanému rozdělení, tj. takovému, že $\mathbb{P}(\hat{a}_\infty = a) = 1$.

(e) Pravděpodobnost $\theta := \mathbb{P}(X \leq 10) = F(10)$ odhadneme pomocí empirické distribuční funkce, tj.

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{X_i \leq 10\}.$$

Pak $\mathbb{E}\hat{\theta}_n = \theta$ a var$\hat{\theta}_n = \frac{F(10)(1-F(10))}{n}$.

Cvičení 2. Označme $X = \mathbf{1}\{$náhodně vybraná osoba je levák$\}$

(a) Náhodná veličina X má alternativní rozdělení $Alt(p)$ s nějakým neznámým parametrem $p \in (0,1)$. Parametr p zde vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodné zvolená osoba bude psát levou rukou.

(b) Uvědomíme si, že $\mathbb{E}X = p$, a tedy vhodným nástrojem pro odhad hodnoty p je výběrový průměr, tj.

$$\hat{p}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(c) $\mathbb{E}\hat{p}_n = p, \operatorname{var} \hat{p}_n = \frac{p(1-p)}{n}$.